CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,
EDIȚIA a XX-a, BĂILEȘTI, 29 MARTIE 2025
CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Dacă $n \in N$, atunci $\left[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}\right]$ este:
   a) 3n **b) 0** **c) 3n-1** **d) 3n+1;**

2. În tetraedrul ABCD, punctele E și F sunt mijloacele medianelor AM și AN ale triunghiurilot ABC, respective ACD. Dacă $CE \cap AB = \{P\}, CF \cap AD = \{Q\}$ și $DF \cap AC = \{R\}$, atunci A_{BCD} este:
   a) $\boldsymbol{A_{PQR}}$ **b)** $\boldsymbol{9 \cdot A_{PQR}}$ **c)** $\boldsymbol{4 \cdot A_{PQR}}$ **d)** $\boldsymbol{6 \cdot A_{PQR}}$

3. Dacă a, b numere reale nenule, $a+b=2025$ și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2025$, atunci valoarea expresiei $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2}$ este egală cu:
   a) $\boldsymbol{2025^2}$ **b) 2025** **c)** $\boldsymbol{2025^2-2}$ **d)** $\boldsymbol{2025^2-1}$

4. Fie semidreptele (OA, (OB și (OC necoplanare, astfel încât $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA}) = 60^0$. Fie Q proiecția lui A pe planul (OBC). Dacă OA=6 cm, atunci lungimea segmentului AQ este :
   a) $\boldsymbol{2\sqrt{6}}$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ **c)** $\boldsymbol{3\sqrt{3}}$ **d)** $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

5. Dacă x și y sunt două numere naturale astfel încât $x^2+31y+7x=232$ și y este număr prim, atunci x^2+y^2 este:
   a) 100 **b)104** **c)24** **d) 140;**

Probleme propuse de prof Mirea Mihaela Mioara, Craiova

Partea a –II-a

Pentru problemele 1 şi 2, scrieţi pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ și abc=1, atunci are loc inegalitatea:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^6$$

***

Problema 2 (20 puncte)

Se consideră piramida patrulateră regulate VABCD cu baza ABCD și punctele M, N și P mijloacele muchiilor AD, BC, respective VA. Demonstrați că unghiul dreptei CP cu planul (BAD) are măsura de 45^0 dacă și numai dacă unghiul dreptei CP cu planul (VMN) are măsura de 30^0.

GM 1/2024

Timp de lucru: 2 ore și 30 min
Din oficiu se acordă : 10 puncte

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VIII-a

Partea I

1. d) 2. b) 3. c) 4. a) 5. b)

Partea a II a

1. Din inegalitatea mediilor avem

   $(a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}(a+b+c)^3$……..…..5p

   Din inegalitatea mediilor $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ ..…….3p

   $(a+b+c)^3 \geq 27$…… 2p

   $a+b+c \geq 3 > \frac{8}{3}$……...…….3p

   $\frac{8}{27}(a+b+c)^3 \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^6 \Longrightarrow a+b+c \geq \frac{8}{3}$……...….5p

   Finalizarea……..2p

2. Fie O centrul pătratului ABCD, VO este înălțimea piramidei. Segmentele CP și VO sunt mediane în triunghiul VAC, deci se intersectează în punctual Q……..……3p

   Proiecția dreptei CP pe planul (BAD) este dreapta OC, deci unghiul dreptei CP cu planul (BAD) este $\measuredangle OCQ$……..3p

   $CN \perp MN, CN \perp VO$ și $MN \cap VO = \{O\} \Longrightarrow CN \perp (VMN)$……3p

   Proiecția dreptei CP pe planul (VMN) este dreapta NQ, deci unghiul dreptei CP cu planul (VMN) este $\measuredangle CQN$…….3p

   Dacă $m(\measuredangle OCQ) = 45^0$, atunci $CQ = \sqrt{2} \cdot OC$ și cum $CN = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot OC$, în triunghiul dreptunghic CQN cateta CN este jumătate din ipotenuza CQ, așadar $m(\measuredangle CQN) = 30^0$…….3p

   Reciproc, dacă $(\measuredangle CQN) = 30^0$ atunci $CQ = 2CN = \sqrt{2} \cdot OC$, deci $m(\measuredangle OCQ) = 45^0$…….……..……..5p